解析力学　要点

神戸大学　学生番号 2233112s 原佑

2025 年 4 月 30 日

1　Lagrange 形式の力学

1.1　Euler-Lagrange 方程式の簡潔な導出

f は、x, y, y' で決まるものとし、汎函数 I を、

$$I \equiv \int_a^b f(x, y, y') \, \mathrm{d}x$$

とする。さて、I が停留値を持つような $f(x, y, y')$ の形は何であろうか？ここで、停留値では、$f(x, y, y')$ の形を少し変えた δI について、

$$\delta I \approx 0$$

が成り立つ。函数 y は最初 $y_0(x)$ だったとする。これを、

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon\eta(x)$$

と変化させる。ここに、ε は函数形を司る微小量で、$\eta(x)$ は任意の函数である。固定端条件として、$\eta(a) = \eta(b) = 0$ であって、停留値をとる条件は、普通の微分で、

$$\lim_{\varepsilon \to \quad 0} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon} = 0$$

といえる。

ここで、函数 $f(x(u, v), y(u, v))$ において、

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

であることを思い出して、上を計算する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\int_a^b f(x,y,y')\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \Big\{\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\Big\}}_{\text{部分積分を用いる}}\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\Big[\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\Big]_a^b}_{\text{固定端条件より }0} + \int_a^b \eta(x)\Big\{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big)\Big\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \eta(x)\Big\{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big)\Big\}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

上は、$\forall \eta(x)$ について成り立つゆえ、この値が 0 ならば、

$$
\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big) = 0
$$

である。以上より、Euler-Lagrange 方程式と呼ばれる、

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big) = \frac{\partial f}{\partial y}
$$

を得る。

解析力学の実用上では、一般化座標を q, 系の Lagrangian を L として、

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big) = \frac{\partial L}{\partial q}
$$

から、運動方程式を得ることができる。

2 Hamilton 形式の力学

2.1 Hamilton の正準方程式の簡潔な導出

Lagrange 形式の定式化では、Lagrangian が時間に陽に依存しなければ、一般座標 q_i と一般速度 $\dot{q}_i$ を独立変数として力学を記述する。Hamilton 形式では、一般座標 q_i と一般運動量 p_i を独立変数にとり力学を記述せんとする。

一般運動量 p_i は、

$$
p_i \equiv \frac{\partial L(q,\dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i}
$$

と定める。まずは、Lagrangian の全微分を考える。

$$\mathrm{d}L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}\dot{q}_i \right)$$

上で示した Euler-Lagrange 方程式と一般運動量の定義から、以下を得る。

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}L &= \sum_i \Bigg(\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}q_i}_{E-L\ \text{方程式より}} + \underbrace{p_i \mathrm{d}\dot{q}_i}_{\text{一般運動量の定義から}} \Bigg) \\
&= \sum_i \Bigg(\underbrace{\dot{p}_i \mathrm{d}q_i}_{\text{一般運動量の定義から}} + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i \Bigg)
\end{aligned}$$

さて、いま、

$$\mathrm{d}(p_i \dot{q}_i) = p_i \mathrm{d}\dot{q}_i + \dot{q}_i \mathrm{d}p_i$$

ゆえに、

$$p_i \mathrm{d}\dot{q}_i = \mathrm{d}(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i \mathrm{d}p_i$$

を得る。これを用いれば、

$$\mathrm{d}L = \sum_i \left\{ \dot{p}_i \mathrm{d}q_i + \mathrm{d}(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i \mathrm{d}p_i \right\}$$

$$\mathrm{d}\Big(\sum_i p_i \dot{q}_i - L \Big) = \sum_i (-p_i)\mathrm{d}q_i + \sum_i \dot{q}_i \mathrm{d}p_i$$

である。ここに、

$$H \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

とおけば、これはエネルギー量で、Hamiltonian と呼ばれる量である。上は、

$$\mathrm{d}H = \sum_i \left\{ (-\dot{p}_i)\mathrm{d}q_i + \dot{q}_i \mathrm{d}p_i \right\}$$

と書ける。本式は Lagrangian の全微分の計算の帰結であった。今度は Hamiltonian を直接全微分して、

$$\mathrm{d}H = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i \right)$$

以上二式を比較すれば、以下の二式を得る。

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

これらは Hamilton の正準方程式と呼ばれる。