素粒子物理学勉強ノート

原佑

2025 年 11 月 14 日

目次

PART I
復習

§1. 自然単位系

$\hbar$（Dirac 定数，換算 Plank 定数）は，Planck 定数を 2π で除したもので，量子力学の基本的な定数である。

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1.0055\times\ \mathrm{kg\,m/s^2}$$

光速 c は，特殊相対論の基本的な定数である。

$$c = 2.998\times 10^{8}\,\mathrm{m/s^2}$$

いま，$c=\hbar=1$ なる単位系をとり，**自然単位系**という。

問 1. 地球とアンドロメダとの距離 $d=250$ 光年（自然単位系）を，メートルを単位として表せ。

解

$$\begin{aligned} d &= 2.5\times 10^{6}\times 365\times 24\times 3600\,\mathrm{s} \\ &= 7.9\times 10^{13}\,\mathrm{s} \underbrace{=}_{c=1\text{ をかける}} 7.9\times 10^{13}\times \underbrace{3\times 10^{8}}_{1}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\mathrm{s} \\ &= 2.4\times 10^{22}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

問 2. 陽子の質量は $m_p = 938\,\mathrm{MeV}$ である。このとき，${m_p}^{-1}$ を，メートルを単位として表せ。ただし，$1\,\mathrm{eV} = 1.6\times 10^{-19}\,\mathrm{kg\,m^2/s^2}$ である。

解

$$\begin{aligned} {m_p}^{-1} &= \left(938\times 10^{8}\,\mathrm{eV}\right)^{-1} \\ &= \left(938\times 10^{8}\times 1.6\times 10^{-19}\ \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}\right)^{-1} \\ &\underbrace{=}_{\hbar c=1} \left(938\times 10^{8}\times 1.6\times 10^{-19}\right)^{-1}\times 1.055\times 10^{-34}\times 3\times 10^{8}\ \frac{\mathrm{s^2}}{\mathrm{kg\,m^2}}\ \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ &= 2.1\times 10^{-16}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

自然単位系では，

$$[\text{質量}] = \left[\frac{1}{\text{長さ}}\right] = \left[\frac{1}{\text{時間}}\right]$$

である。

§2. 特殊相対論

特殊相対論は 2 つの原理からなっていた。

- 特殊相対性原理 ⋯ 任意の慣性系は対等である。
- 光速度不変 ⋯ 光速は一定値。

x 方向に相対運動する座標系において，Lorentz 変換は，

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ここに，

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$\beta = \frac{v}{c}$$

である。Lorentz 変換は，Einstein の縮約

$$A^{\mu}{}_{\nu}B^{\nu} = \sum_{\nu=0,\,1,\,2,\,3} A^{\mu}{}_{\nu}B^{\nu}$$

を用いれば，

$$x^{\mu} \longmapsto x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}x^{\nu}$$

となる。ただし，

$$\begin{aligned}\left[\Lambda^{\mu'}{}_{\nu}\right] &= \begin{pmatrix} \Lambda^{0'}{}_{0} & \dots & \Lambda^{0'}{}_{3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda^{3'}{}_{0} & \dots & \Lambda^{3'}{}_{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

上記の 2 つの原理から，距離の不変性

$$(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

が要請される。計量テンソル

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & & -1 & \\ & 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

を用いれば，

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= g_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu} \\ &= g_{\mu'\nu'}\Delta x^{\mu'}\Delta x^{\nu'}\end{aligned}$$

である。一般の Lorentz 変換は，距離 Δs^2 を変えない変換

$$x^{\mu} \longmapsto x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}x^{\nu}$$

である。以降，原点からの距離を考えるゆえ，$\Delta x' = x'$ とする。Δs^2 を変えないゆえ，

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} &= g_{\mu'\nu'}x^{\mu'}x^{\nu'} \\ &= g_{\mu'\nu'}\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}x^{\mu}\Lambda^{\nu'}{}_{\nu}x^{\nu}\end{aligned}$$

従って，

$$\boxed{g_{\mu\nu} = g_{\mu'\nu'}\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\Lambda^{\nu'}{}_{\nu}}$$

が云える。また，$x^{\mu} \longmapsto x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}x^{\nu}$ の逆変換 $x^{\mu'} \longmapsto x^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'}x^{\nu'}$ を考えると，

$$\begin{aligned}x^{\mu} &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu'}x^{\nu'} \\ &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\rho}x^{\rho}\end{aligned}$$

であるゆえ，

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\rho} = \delta^{\mu}{}_{\rho} = \begin{cases} 1 & (\mu = \rho) \\ 0 & (\mu \neq \rho) \end{cases}$$

がわかる。

物理量は，Lorentz 変換による応答で分類できて，

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$テンソル $\longmapsto$ スカラー，Lorentz 変換に対して，A の成分は変換しない。
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$テンソル $\longmapsto$ 反変ベクトル，$A^{\mu} \longmapsto A^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}A^{\nu}$
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$テンソル $\longmapsto$ 共変ベクトル，$A_{\mu} \longmapsto A_{\mu'} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu'}A_{\nu}$

§3. 量子力学

Schrödinger 方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{x})\right)\Psi \ \text{(Schrödinger 方程式)}$$
$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{x})\right)\Psi \ \text{(自然単位系)}$$

である。

問 1. Schrödinger 方程式を”導出”せよ。

解 関係式

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(x)$$

に，量子化の手続き $E \to i\partial_t$，$\boldsymbol{p} \to -i\nabla$ を導入することによる。

Hamiltonian$\mathscr{H}$

$$\mathscr{H} = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

を用いて，Schrödinger 方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \mathscr{H}\Psi$$

と書ける。

確率の流れとしての解釈を思い出そう。（簡単のため 1 次元を考える。）

$$\rho = |\Psi|^2$$
$$j = \frac{i}{2m}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\Psi^*\right)\Psi - \Psi\left(\frac{\partial}{\partial x}\Psi\right)\right]$$

は，確率の流れの方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}j = 0$$

を満たす。

問 2.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x}j=0$$

の成立を，計算によって確かめよ。

解

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho&=\left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*\right)\Psi+\Psi^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi\right)\\&=-\frac{i}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\Psi^*\right)\Psi-\Psi^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\Psi\right)\right]\\&=-\frac{\partial}{\partial x}j\end{aligned}$$

より従う。

　これは，容易に 3 次元に拡張できて，

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi&=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\boldsymbol{x})\right)\Psi\ (\text{Schrödinger 方程式})\\i\frac{\partial}{\partial t}\Psi&=\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2+V(\boldsymbol{x})\right)\Psi\ (\text{自然単位系})\end{aligned}$$

は，確率の流れの方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$$

を満たす。

PART II
方程式系の導入

§4. 素粒子標準模型

現在知られている素粒子標準模型を概観しよう。

素粒子標準模型								
	lepton			quark			gauge boson	Higgs 粒子
	第一世代	第二世代	第三世代	第一世代	第二世代	第三世代		
粒子種	e	μ	τ	u	c	t	G, $\mathrm{W}^{\pm}$, Z^0, A	H
	ν_e	ν_μ	ν_τ	d	s	b		
従う方程式	Dirac						Maxwell	Klein-Gordon

proton（uud）や neutron（udd）など，quark 3つで作られている粒子を baryon と呼び，quark と antiqurk の2つで作られている粒子を meson と呼ぶ。baryon と meson を合わせて，hadron と呼ぶ。

素粒子間に働く，基本的な力ないしは相互作用として，以下の4つが知られている。これらの基本的相互作用は，gauge 原理により統一的に理解され，gauge boson と呼ばれる粒子が媒介する（とされている。）。

- electromagnetic interaction（電磁相互作用）
  - 長距離力で，photon と呼ばれる gauge boson を媒介にして荷電粒子間に伝わる力。
- strong interaction（強い相互作用）
  - 原子核内の proton や neutron を，より詳しく言えば quark に働く相互作用。短距離力で，電磁気力の 100 倍程度の強さを持つ。gluon と呼ばれる gauge boson が媒介する。
- weak interaction（弱い相互作用）
  - β 崩壊などが一例。短距離力で，媒介粒子である weak boson が proton の 100 倍程度の質量をもっているため，非常に弱い。
- gravitational interaction（重力相互作用）
  - すべての素粒子間に働く長距離力で，graviton が媒介する（とされている。）。

ここで，各粒子が従う方程式系は，

$$\begin{aligned} \text{Klein-Gordon 方程式}:&\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\phi = 0 \\ \text{Dirac 方程式}:&\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\phi = 0 \\ \text{Maxwell 方程式}:&\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \end{aligned}$$

であり，以下で導入してゆく。

§5. Klein-Gordon 方程式

前章で導入した Schrödinger 方程式は，

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{x})\right)\Psi$$

であった。しかるに，この方程式は，時間の一階微分と空間の二階微分を含み，相対論的な式ではない。そこで，Schrödinger 方程式を，相対論的に”拡張”してみよう。

問 1. 相対論的エネルギーの関係式を書け。自然単位系を用いよ。

解

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2 \; (\leftarrow E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2)$$

問 2. 相対論的エネルギーの関係式に量子化の手続きを導入して，Klein-Gordon 方程式を導け。

解

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(t,\,\boldsymbol{x})=\left(-\nabla^2+m^2\right)\phi(t,\,\boldsymbol{x})$$

相対論的な表式に書き直しておくと，

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu+m^2\right)\phi(t,\,x)=0$$

となる。

Klein-Gordon 方程式

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu+m^2\right)\phi(t,\,x)=0$$

ここで，d'Alembertian $\Box\equiv\partial_\mu\partial^\mu$ を導入すると，

$$\left(\Box+m^2\right)\phi(t,\,x)=0$$

となる。

§6. Klein-Gordon 方程式の確率解釈の問題

§3 で述べたように，Schrödinger 方程式を満たす波動函数 ϕ は確率解釈が可能であった。しかるに，Klein-Gordon 方程式ではそれができない。すなわち，Schrödinger 方程式を満たす $\rho(t,\,\boldsymbol{x})=|\phi(t,\,\boldsymbol{x})|^2$ に対して，確率解釈

$$\rho(t,\,\boldsymbol{x})=\text{時刻}\ t,\ \text{位置}\ \boldsymbol{x}\ \text{に粒子が見いだされる確率密度}$$

が可能となるが，Klein-Gordon 方程式ではそうではないことを見る。ここで，定義より，確率解釈が可能となるための必要条件が，$\rho(t,\,\boldsymbol{x})\geqq 0$ であることに注意しておく。

さて，平面波解

$$\phi=\exp\left(-iEt+ip_xx+ip_yy+ip_zz\right)$$

を Klein-Gordon 方程式に代入すると

$$\left(-E^2+\boldsymbol{p}^2+m^2\right)\exp\left(-iEt+ip_xx+ip_yy+ip_zz\right)=0$$
$$\therefore E=\pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}\ \text{（正エネルギー解，負エネルギー解）}$$

を得る。ここで，

$$\rho=\frac{i}{2m}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\phi\right)$$
$$j^\mu=-\frac{i}{2m}\left[\phi^*\partial^\mu\phi-\left(\partial^\mu\phi^*\right)\phi\right]$$

で定義しておくと j^μ は次に示す流れの方程式

$$\partial_\mu j^\mu=0$$

を満たす。これは，式??の相対論的表式であり，Klein-Gordon 方程式とその複素共役から導ける。

問 1. これを示せ。

解 （今のところ LaTeX 打ちを略）

確率密度についてみよう。じつは，$\rho \geqq 0$ は保証されていない。

問 2. 先の ρ の表式に平面波解を代入し，$\rho \gtreqless 0$ を確認せよ。

解

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{i}{2m}\left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t}\phi\right) \\ &= \frac{E}{m}\begin{cases} > 0 : \text{正エネルギー解} \\ < 0 : \text{負エネルギー解}\end{cases}\end{aligned}$$

以上より，Klein-Gordon 方程式において

- $\rho < 0$
- 粒子の消滅・生成が記述できない

という問題点があらわになった。この点については，場の量子論で解決を見る。

§7. Dirac 方程式の簡単な導入

Dirac のアイデアに従って，Dirac 方程式を導入してみよう。Einstein の関係式 $E^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2{=}0$ を因数分解してみるのだが

$$E^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2 = \left(E + \sqrt{p^2 + m^2}\right)\left(E - \sqrt{p^2 + m^2}\right)$$

などとすると，うまくいかないことがわかる。それは，一つには，どちらの因数を 0 ととるべきか（正エネルギー解，負エネルギー解）がわからないこと。そして時間と空間が対等な方程式を定められないことなどがあげられる。そこで，Dirac は，

$$\begin{aligned}E^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2 &= p_\mu p^\mu - m^2 \\ &= (\gamma^\nu p_\nu + m)(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0\end{aligned}$$

とできるとした。

問 1. $\gamma^\mu p_\mu - m = 0$ として，量子化の手続きを導入してみよ。（じつは，どちらの因数をとっても同等である。）

解

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\phi(t, \boldsymbol{x}) = 0$$

この方程式を Dirac 方程式という。ここで，γ は，

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

であるということが知られている。

§8. Wyle 方程式

§9. Maxwell 方程式の相対論的記述

補遺 §14 の議論を自然単位系に戻ってまとめなおすと，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ として，

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \cdots\cdots ①$$

と書ける。

相対論的的記述による，Maxwell 方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

実際，Gauss の法則，Ampere の法則は，① を満たす。単磁荷の式と，Faraday の電磁誘導の法則は，Bianchi の恒等式から，同様に ① を満たす。

問 1. Bianchi の恒等式

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0$$

を示せ。

解

$$\partial^\rho\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) + \partial^\mu\left(\partial^\nu A^\rho - \partial^\rho A^\nu\right) + \partial^\nu\left(\partial^\rho A^\mu - \partial^\mu A^\rho\right) = 0$$

より従う。

いま，Maxwell 方程式を満たす A^μ があるとする。この時，任意の函数 f に対して，$\bar{A^\mu} = A^\mu - \partial^\mu f$ も同様に Maxwell 方程式を満たす。

問 2. これを示せ。

解

$$\begin{aligned}\bar{F^{\mu\nu}} &= \partial^\mu \bar{A^\nu} - \partial^\nu \bar{A^\mu} \\ &= \partial^\mu\left(A^\nu - \partial^\nu f\right) - \partial^\nu\left(A^\mu - \partial^\mu f\right) \\ &= F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

つまり，Maxwell 方程式の解には不定性がある。この時，$A^\mu \to A^\mu - \partial^\mu f$ とすることを gauge 変換といい，この変換の下での Maxwell 方程式の対称性のことを gauge 対称性と呼ぶ。

$$A^\mu \to A^\mu - \partial^\mu f \quad \text{：gauge 変換}$$

§10.　質点の解析力学〜Lagrange 形式〜（工事中）

$\mathscr{L}$ を系の Lagrangian，q, $\dot{q}$ を一般化座標，一般化運動量として，Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q}$$

§11.　質点の解析力学〜Hamilton 形式〜

Lagrange 形式と同等な時間発展を記述する別の方法に，Hamilton 形式がある。Hamiltonian を

$$\mathscr{H}(x,\, p) = \left[p\dot{x} - \mathscr{L}(x,\, \dot{x})\right]_{\dot{x}=\dot{x}(x,\, p)} \quad \cdots\cdots ②$$

とし，共役運動量 p を

$$p \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}}$$

と定める。$\dot{x}=f(x,\,p)$ の形に変形して，式 ② に代入することで，以下の，Hamilton の正準方程式を得る。ここに，Poisson 括弧式を

$$\{f,\,g\}_p=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x}$$

と定めた。

Hamilton の正準方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\mathscr{H}(x,\,p)}{\partial p}=\{x,\,\mathscr{H}\}_p$$
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial\mathscr{H}(x,\,p)}{\partial x}=\{p,\,\mathscr{H}\}_p$$

§12. 場の Lagrange 形式（工事中）

$\mathcal{L}$ を Lagrangian 密度とすると，場の Euler-Lagrange 方程式は

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\ \cdots\cdots\ ③$$

$\mathcal{L}$ を Lagrangian 密度とすると，場の Euler-Lagrange 方程式は

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}$$

§13. K-G 場，Dirac 場，Maxwell gauge 場の作用

K-G 場の作用は

$$S[\phi]=\int\mathrm{d}^4x\left[\underbrace{\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)\left(\partial^\mu\phi\right)-\frac{m^2}{2}}_{\mathcal{L}}\phi^2\right]$$
$$=\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\,\partial_\beta\phi-\frac{m^2}{2}\phi^2\right]$$

である。

問 1. これを確かめよ。

解 実際，③ について計算すると，

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=\frac{\partial}{\partial\phi}\left(-\frac{m^2}{2}\phi^2\right)=m^2\phi$$
$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\right)=\partial_m u\left(\frac{1}{2}g^{\mu\beta}\partial_\beta\phi+\frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\partial_\alpha\phi\right)=\partial_\mu\left(\partial^\mu\phi\right)$$

となるゆえ，

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu+m^2\right)\phi=0$$

が従う。

PART III
補遺

§14. Gauge 変換（電磁気学 3,4 より）

本章の議論には，MKSA 単位系を用いる。

Maxwell 方程式を書き並べると

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} = \mu_0\boldsymbol{j}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

である。ここで，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ はそれぞれ，電位 ϕ と vector potential$\boldsymbol{A}$ をもちいて

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$$
$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

であった。Maxwell 方程式をより簡潔な形で述べることを考えよう。

まず，vector 解析の恒等式

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

により，$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ は必ず成り立つ。ゆえに，$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ を仮定すれば，単磁荷の式は法則から除ける。

更に、Faraday の法則に $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ を代入して，

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}\right)$$

となる。ここで，恒等式

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0$$

を考えると，式⑭において，

$$-\nabla\tilde{\phi} \equiv \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$$

と置けば，法則から除けるとわかる。

Ampere-Maxwell の法則，および Gauss の法則にもこの表式を代入して整理すると，

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} - \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\phi\right) = -\mu_0\boldsymbol{j}$$
$$\nabla^2\phi + \nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

を得る。このとき、電場と磁場は以下のように書ける。

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{E} = -\nabla\tilde{\phi} - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$$

gauge 変換

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{E} = -\nabla\widetilde{\phi} - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$$

の変換により，Maxwell 方程式は

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} - \nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\phi\right) = -\mu_0\boldsymbol{j}$$
$$\nabla^2\phi + \nabla\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

と整理できた。ただし，スカラー関数 χ を用いて

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi$$
$$\phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\chi$$

と変換しても、同じ $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を与える。この変換のことを gauge 変換という。このことは，「Maxwell 方程式は gauge 不変である。」という。

さて，二式になった Maxwell 方程式をさらに整理してゆく。Ampere-Maxwell の法則のなれの果ての第二項が 0 になると，表式は，$\boldsymbol{A}$ のみで表せる。すなわち

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$$

となると，

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{j}$$

となる。この条件は，Lorenz 条件と呼ばれている[1)]。Gauss の法則は，

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\phi\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\left(\nabla^2 - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

となる。ここまでの手続きで，Maxwell 方程式は

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{j}$$
$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\phi = 0$$

と整理できた。

これを成分で書き下すと，

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)A_x = -\mu_0 j_x$$
$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)A_y = -\mu_0 j_y$$
$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)A_z = -\mu_0 j_z$$
$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

1) Lorentz ではなく Lorenz である。

ここで，4 元ベクトル

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad , \quad j^\mu = \begin{pmatrix} \rho c \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

を用いると，さらに整理できて，

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)A^\mu = -\mu_0 j^\mu$$

となる。ここで，$\Box \equiv \nabla^2 - \dfrac{1}{c^2}\partial_t^2$ としてやると，

$$\Box A^\mu = -\mu_0 j^\mu$$

である。