素粒子物理学中間レポート

神戸大学理学部物理学科 2233112s 原佑

2025 年 12 月 7 日

本レポートでは，Pauli 行列は，

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。また，

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\mu = 0,\, 1,\, 2,\, 3)$$

と定め，断りなく用いることがある。また，Einstein の縮約規約を用いる。

1.

（1）

Klein-Gordon 方程式を書き下すと，

$$\begin{aligned}\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\phi(t,\, \boldsymbol{x}) &= \left(\Box + m^2\right)\phi(t,\, \boldsymbol{x}) \\ &= \left(\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 + m^2\right)\phi(t,\, \boldsymbol{x}) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

（2）

平面波解 $\phi(t,\, \boldsymbol{x}) = \exp\left(-iEt + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right)$ を Klein-Gordon 方程式に代入すると，

$$\left(-E^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2\right)\exp\left(-iEt + ip_x x + ip_y y + ip_z z\right) = 0$$

$$\therefore E = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}\ \text{（正エネルギー解，負エネルギー解）}$$

となる。

（3）

$$\rho = \frac{i}{2m}\left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t}\phi\right)$$

$$\boldsymbol{j} = -\frac{i}{2m}\left[\phi^* \nabla\phi - \left(\nabla\phi^*\right)\phi\right]$$

とし，４元ベクトル $j^\mu = (\rho,\, \boldsymbol{j})$ を

$$j^\mu = -\frac{i}{2m}\left[\phi^* \partial^\mu \phi - \left(\partial^\mu \phi^*\right)\phi\right]$$

で定義しておくと，j^μ は次に示す流れの方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\, \boldsymbol{x}) + \nabla\cdot\boldsymbol{j}(t,\, \boldsymbol{x}) = \partial_\mu j^\mu = 0$$

を満たす。以下では，これを示す。

Klein-Gordon 方程式とその複素共役をそれぞれ

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\phi = 0$$

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\phi^* = 0$$

とする。これらに対して，それぞれ ϕ^*，ϕ をかけて

$$\phi^* \partial_\mu \partial^\mu \phi - \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi^* = 0$$

を得る。ここで，

$$\partial_\mu(\phi^*\partial^\mu\phi) = (\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) + \phi^*\partial_\mu\partial^\mu\phi$$
$$\partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi^*) = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) + \phi\partial_\mu\partial^\mu\phi^*$$

であるから，

$$\partial_\mu(\phi^*\partial^\mu\phi) - \partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi^*) = 0$$

となり，これを整理すると

$$\partial_\mu[\phi^*\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^*)\phi] = 0$$
$$\therefore \partial_\mu j^\mu = 0$$

となる事より，題意は示された。

確率密度についてみると，$\rho \geqq 0$ は保証されていない。実際，平面波解を代入すると

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{i}{2m}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\phi^*}{\partial t}\phi\right)\\ &= \frac{i}{2m}[\exp(iEt - i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})(-iE)\exp(-iEt + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}) - (iE)\exp(iEt - i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})\exp(-iEt + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})]\\ &= \frac{E}{m}\begin{cases} > 0 : \text{正エネルギー解} \\ < 0 : \text{負エネルギー解}\end{cases}\end{aligned}$$

となり，$\rho \gtreqless 0$ となることがわかる。このため，Klein-Gordon 方程式は確率密度の解釈を与えることができない。

2.

（1）

Hamiltonian を

$$\mathscr{H} = -i\alpha^x\partial_x - i\alpha^y\partial_y - i\alpha^z\partial_z + m\beta$$

とする。Schrödinger 型の方程式

$$i\partial_t\phi = \mathscr{H}\phi$$

の両辺に $i\partial_t$ を作用させると，

$$-\partial_t^2\phi = (i\partial_t)^2\phi = \mathscr{H}(i\partial_t\phi) = \mathscr{H}(\mathscr{H}\phi) = \mathscr{H}^2\phi$$

となるゆえ，$\partial_t^2\phi = -\mathscr{H}^2\phi$ である。ここで，

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^2 &= (-i\alpha^x\partial_x - i\alpha^y\partial_y - i\alpha^z\partial_z + m\beta)^2\\ &= -(\alpha^x)^2\partial_x^2 - (\alpha^y)^2\partial_y^2 - (\alpha^z)^2\partial_z^2 + m^2\beta^2\\ &\quad - (\alpha^x\alpha^y + \alpha^y\alpha^x)\partial_x\partial_y - (\alpha^y\alpha^z + \alpha^z\alpha^y)\partial_y\partial_z - (\alpha^z\alpha^x + \alpha^x\alpha^z)\partial_z\partial_x\\ &\quad - im(\alpha^x\beta + \beta\alpha^x)\partial_x - im(\alpha^y\beta + \beta\alpha^y)\partial_y - im(\alpha^z\beta + \beta\alpha^z)\partial_z\end{aligned}$$

よって，求める式は

$$\begin{aligned}\partial_t^2\phi = \big[&(\alpha^x)^2\partial_x^2 + (\alpha^y)^2\partial_y^2 + (\alpha^z)^2\partial_z^2 - m^2\beta^2\\ &+ (\alpha^x\alpha^y + \alpha^y\alpha^x)\partial_x\partial_y + (\alpha^y\alpha^z + \alpha^z\alpha^y)\partial_y\partial_z + (\alpha^z\alpha^x + \alpha^x\alpha^z)\partial_z\partial_x\\ &+ im(\alpha^x\beta + \beta\alpha^x)\partial_x + im(\alpha^y\beta + \beta\alpha^y)\partial_y + im(\alpha^z\beta + \beta\alpha^z)\partial_z\big]\phi\end{aligned}$$

（2）

(1) で求めた式が，Klein-Gordon 型の方程式

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\phi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_t^2\phi = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - m^2)\phi$$

と一致するための条件は，係数比較から

- 2 階微分の係数より：$(\alpha^x)^2 = (\alpha^y)^2 = (\alpha^z)^2 = \beta^2 = I$
- cross term の係数より：$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 0 \quad (i \neq j)$
- 1 階微分の係数より：$\{\alpha^i, \beta\} = \alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0$

これらを満たす 4×4 行列の組み合わせを 3 通り挙げる。ここで σ^i は Pauli 行列，I は 2×2 単位行列である。

1. Dirac-Pauli 表示

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

2. chiral 表示

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

これは $\beta' = -\beta$ としたものであり，$\beta'^2 = \beta^2 = I$ および $\{\alpha^i, \beta'\} = -\{\alpha^i, \beta\} = 0$ を満たすため，条件に適合する。

（3）

chiral 表示を用いる。まず，Dirac 場の上 2 成分と下 2 成分を分離し，

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix}$$

とする。

$m = 0$ の場合，質量項 $m\beta$ を含む項が消滅するので，β に関する条件（$\beta^2 = I$ および $\{\alpha^i, \beta\} = 0$）が不要となる。

$m \neq 0$ の場合，Dirac 方程式は 4 成分が質量項を通じて混ざり合い，代数的な条件を満たすために最小で 4×4 行列が必要であった。しかし $m = 0$ の場合，chiral 表示を用いると Dirac 方程式は

$$\begin{pmatrix} -i\sigma^\mu\partial_\mu & 0 \\ 0 & -i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} = 0$$

となり，

$$i\sigma^\mu\partial_\mu\phi_R = 0, \quad i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi_L = 0$$

という 2 つの独立した方程式（Weyl 方程式）に分離する。これらは 2×2 行列（Pauli 行列）のみで記述可能であり，β 行列を必要としない点が $m \neq 0$ の場合と本質的に異なる。ϕ_L, ϕ_R を，Weyl 場と呼ぶ。

3.

（1）

相対論的 Maxwell 方程式は，電磁場テンソル $F^{\mu\nu}$ を用いて

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \cdots\cdots ①$$

と書ける。諸量は，講義中に与えられたものとする。

① の $\nu = 0$ は Gauss の法則，$\nu = i$ は Ampere の法則である。実際，$\nu = 0$ について，$F^{00} = 0$ に注意すると

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 0} &= \partial_j F^{j0} \\ &= \partial_j\left(\partial^j A^0 - \partial^0 A^j\right) \\ &= \partial_j\left(-\partial_j\phi + \partial_0 A_j\right) \\ &= \nabla\cdot\boldsymbol{E} \\ &= j^0 = \rho \end{aligned}$$

であり，Gauss の法則を満たす。Ampere の法則は $\nu \neq 0$ について，$i=1$ 成分を調べればよく，

$$\begin{aligned}
\partial_0 F^{01} + \partial_j F^{j1} &= \partial_0 \left(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0\right) + \partial_j \left(\partial^j A^1 - \partial^1 A^j\right) \\
&= \partial_0 \left(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0\right) + \partial_2 \left(\partial^2 A^1 - \partial^1 A^2\right) + \partial_3 \left(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3\right) \ (j=1 \text{ は，} F^{00}=0) \\
&= \partial_0 \left(-\partial_0 A_1 + \partial_1 A_0\right) + \partial_2 \left(\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2\right) + \partial_3 \left(\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3\right) \\
&= -\partial_0 E_1 + \left(\partial_2 B_3 - \partial_3 B_2\right) \\
&= j^1
\end{aligned}$$

より従う。$i=2,3$ についても同様。

単磁荷の式と，Faraday の電磁誘導の法則は，Bianchi の恒等式

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0$$

から，ただちに従う。

ここで，Bianchi の恒等式は,

$$\partial^\rho \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) + \partial^\mu \left(\partial^\nu A^\rho - \partial^\rho A^\nu\right) + \partial^\nu \left(\partial^\rho A^\mu - \partial^\mu A^\rho\right) = 0$$

より従う。

単磁荷の式は，$\mu=1,\ \nu=2,\ \rho=3$ とした場合を考えればよく，

$$\begin{aligned}
\partial^3 F^{12} + \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} &= \partial^3 \left(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1\right) + \partial^1 \left(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2\right) + \partial^2 \left(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3\right) \\
&= \partial_3 B_3 + \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 \\
&= \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0
\end{aligned}$$

として従う。

Faraday の法則の，第 3 成分は，$\mu=0,\ \nu=1,\ \rho=2$ とした場合を考えればよく，

$$\begin{aligned}
\partial^2 F^{01} + \partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} &= \partial^2 \left(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0\right) + \partial^0 \left(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1\right) + \partial^1 \left(\partial^2 A^0 - \partial^0 A^2\right) \\
&= \partial_2 E_1 - \partial_0 B_3 - \partial_1 E_2 \\
&= \left(\nabla \times \boldsymbol{E}\right)_3 - \partial_0 B_3 = 0
\end{aligned}$$

として従う。他成分も同様。

（2）

いま，Maxwell 方程式を満たす A^μ があるとする。この時，任意の函数 f に対して，$\bar{A^\mu} = A^\mu - \partial^\mu f$ も同様に Maxwell 方程式を満たす。これは，次の計算

$$\begin{aligned}
\bar{F^{\mu\nu}} &= \partial^\mu \bar{A^\nu} - \partial^\nu \bar{A^\mu} \\
&= \partial^\mu \left(A^\nu - \partial^\nu f\right) - \partial^\nu \left(A^\mu - \partial^\mu f\right) \\
&= F^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

より従う。

4.

（1）

Lie 群 $SO(3)$ の構造定数を求める。$SO(3)$ の生成子 T は以下で与えられる。

$$T^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

実際に交換関係 $[T^a, T^b] = T^a T^b - T^b T^a$ を計算する。

まず $[T^x, T^y]$ について,

$$
\begin{aligned}
[T^x, T^y] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= i\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= iT^z
\end{aligned}
$$

次に $[T^y, T^z]$ について,

$$
\begin{aligned}
[T^y, T^z] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\
&= iT^x
\end{aligned}
$$

最後に $[T^z, T^x]$ について,

$$
\begin{aligned}
[T^z, T^x] &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= i\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= iT^y
\end{aligned}
$$

以上の結果より，交換関係は

$$
\begin{aligned}
[T^x, T^y] &= iT^z \\
[T^y, T^z] &= iT^x \\
[T^z, T^x] &= iT^y
\end{aligned}
$$

となる。一般に $[T^a, T^b] = i\sum_c f^{abc}T^c$ と書けるため，構造定数は

$$
f^{xyz} = f^{yzx} = f^{zxy} = 1, \quad f^{xzy} = f^{zyx} = f^{yxz} = -1
$$

となり，これは Levi-Civita の記号を用いて

$$f^{abc} = \epsilon^{abc}$$

と表される。