Lorentz 収縮

2025 年 4 月 30 日

1　Lorentz 収縮

1.0.1　同時性

K 系の x 軸上の $x_1, x_2 (t_1 = t_2 = t)$ にて起きた事件を k 系から観測するとする。各座標を $(\xi_1, \tau_1), (\xi_2, \tau_2)$ として，Lorentz 変換から

$$\tau_2 - \tau_1 = \gamma \left[v \left(\frac{x_1 - x_2}{c^2} \right) \right]$$

である。したがって，$x_1 \neq x_2$ の時 $\tau_1 \neq \tau_2$ であって，K 系で同時に起きたことも k 系から観測すれば一般には同時とは判断されない。

これは逆もしかりである。k 系での事件を K 系で観測すれば

$$t_2 - t_1 = \gamma \left[v \left(\frac{\xi_1 - \xi_2}{c^2} \right) \right]$$

となり，同様の結論が得られる。

1.0.2　棒の Lorentz 変換

k 系 ξ 軸上に長さ $l_0 = \xi_2 - \xi_1$ の棒が静止している。K 系から見る棒の長さを $l = x_2 - x_1$ とおく。K 系の観測者は x_1, x_2 の K 系の時刻の座標値でもって l を判断することに注意せよ。$\xi_1 = \gamma(x_1 - c\beta t)$，$\xi_2 = \gamma(x_2 - c\beta t)$ であるから，

$$l_0 = \xi_2 - \xi_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l$$

これから

$$\therefore l = \sqrt{1 - \beta^2} l_0 < l_0$$

つまり，動いている棒は収縮する。

逆に，K 系 x 軸上に静止する長さ $l_0 = x_2 - x_1$ の棒は，k 系からみて，τ で長さを判断して，同様に

$$l_0 = \xi_2 - \xi_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l$$

従って，**互いに相手の系上に静止する棒は収縮すると判断する**。

Lorentz らが導入した Lorentz 収縮は ether に対して運動する物体について運動するものについてのみ起きたが，Einstein にいわせれば，これは相対的なものであった。

1.0.3　時計の遅れ

k 系の時刻 τ と K 系の時刻 t について

$$t = \gamma \left[\tau + \frac{\beta}{c} \xi \right]$$

が成り立つ。今 k 系の時計 C' が原点にあるとして，

$$\tau = t\sqrt{1-\beta^2} < \tau$$

であるので，K 系から見る C' の読み τ は K 系の時計 C の読み t より小さい。つまり K 系から見て k 系の時計は遅れている。

逆に k 系からは

$$t = \tau\sqrt{1-\beta^2} < \tau$$

より K 系の時刻のほうが遅れている。つまり**相手の座標原点に置かれた時計は互いに相手の時計よりも遅れていると判断する**。

たとえば宇宙線のなかの μ 中間子は，静止しているときの平均寿命 T_0 と，地球上で観察する時の平均寿命 T は

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} > T_0$$

より伸びる。